鹿児島女子短期大学紀要
第44号（2009）209～222頁

因数分解の基本公式の導き方について

How teachers should teach the basic formula for the factorization

山　口　倬　史
Yamaguchi Takashi

１　はじめに

数学の問題解法の基本は，「因数分解ができるか」であると思っている。しかし，高校に入学して間もなく学習する因数分解の授業の時期に，「数学が分からなくなった」という言葉をよく耳にした。

なぜ因数分解を学習する時期に，数学が分からなくなるのか。高校を退職してから考えた。

それは，因数分解を学習する最初に，「因数分解は乗法公式の逆」である。だから，乗法公式を暗記したように，「因数分解の公式も暗記しなさい」という授業展開をしていたからではないか。

なぜ暗記していた方が良いかを説明せず，ただ「暗記せよ」。しかも50分の授業で生徒には「感激・驚き」もなかったであろう。これでは，因数分解に興味・関心が湧くはずがない。

そこで，教科書に記述されている言葉を引用しながら，学習者の興味・関心を喚起し，学習者が「感激・驚く」因数分解の公式の導き方はないのかを考えた。

この因数分解の公式の導き方を紹介する前に，生徒が学習する因数分解の教科書内容は，どのようになっているか調べてみた。

本県の平成18年度数学の使用教科書は，中学校が東京書籍か学校図書，もしくは啓林館の教科書であった。高校は，各高校に教科書の採択が委ねられているので多種である。

そこで，因数分解に関する教科書内容を，中学校三年生の学校図書と高校一年の東京書籍から調べてみた。

なお，この教科書内容で，下線部は筆者が施したもので，因数分解の導き方に活用する文章となる。

２　中学校三年生の教科書内容の一部

教科書は第Ⅰ章から第VI章までで構成され，第１章の（２）節に因数分解に関する内容がある。

第１章　式の計算　（１）多項式の乗法（２）因数分解　①素因数分解　②因数分解　③公式による因数分解

② 因数分解

教科書の「？」の部分は省略した（１ページ相当）・・・・以下教科書は，次のようになっている。

多項式のなかには，いくつかの式の積の形で表されるものがあります。たとえば，前ページの「？」（1），（2）から，次の式が成り立つことがわかります。

$x^2+3x=x(x+3)$　①

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$　②

このように，多項式がいくつかの単項式や多項式の積の形で表されるとき，１つ１つの式をもとの多項式の因数といいます。

たとえば，①のx，$x+3$は，x^2+3xの因数です。また，②の$x+1$，$x+2$はx^2+3x+2の因数です。

多項式をいくつかの因数の積の形で表すことを，その多項式を因数分解するといいます。

$$x^2+3x+2 \underset{\text{展開}}{\overset{\text{因数分解}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$$ ・・・・積の形

問１　次の式の右辺は，左辺の多項式を因数分解したものです。□にあてはまる数を書き入れなさい。

（1）$x^2-\square x = x(x-5)$　（2）$x^2+\square x+\square=(x+4)(x+3)$

（3）$x^2+\square x+\square=(x+3)^2$　（4）$y^2-\square y+\square=(y-7)^2$

（5）$a^2-\square = (a+3)(a-3)$

○共通な因数

多項式の各項に[①]共通な因数があるときは，分配法則を使い，共通な因数をかっこの外にくくり出すことによって，その多項式を因数分解することができます。

$ab+ac=a(b+c)$

問２　次の多項式の各項に共通な因数をいいなさい。また，この多項式を因数分解しなさい。

（1）$mx-my$　（2）$ab^2+2ab+7a$

例１　多項式　$2a^2+4ab$を因数分解しなさい。

考え方　$2a^2=2a\times a$，$4ab=2a\times 2b$だから，$2a$が２つの項の共通な因数である。

$2a^2+4ab=2a\times a+2a\times 2b$　　$2a\times a+2a\times 2b$

$=2a(a+2b)$　　$=2a(a+2b)$

問３　次の式を因数分解しなさい。

（1）$4ax+8ay$　（2）$3x^2+7x$　（3）x^2-x　（4）x^2y+xy^2

（5）$2a^2+6b-8c$　（6）$9x^2-3xy+6x$

③公式による因数分解

14ページでまとめた乗法公式を逆に使うと，多項式を因数分解することができます。[②] その利用のしかたを考えてみましょう。

参考までに14ページにまとめてある乗法公式記載内容を紹介しておく。

乗法公式

1　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

bをaにおきかえる

2　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

bを－aにおきかえる

aを－aにおきかえる

3　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

4　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

● $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ の公式

例１　x^2+6x+8　を因数分解しなさい。

$x^2+(a+b)x+ab$

$x^2\ +\ 6x\ +\ 8$

考え方　和が６で積が８になる２数aとbを見つける。

①　積が８になる整数の組は，右の表のように４組ある。

積が８	和が６
１と８	×
－１と－８	×
２と４	○
－２と－４	×

②　このうち，和が６になるのは，２と４である。

$x^2+6x+8=x^2+(2+4)x+2\times4$

$=(x+2)(x+4)$

問１　次の式を因数分解しなさい。

（1）x^2+9x+8　（2）x^2+5x+6　（3）x^2-5x+4　（4）$x^2-7x+10$

例２　x^2+3x-4　を因数分解しなさい。

考え方　積が－４になる２数のうち，和が３になるものを見つける。右の表の整数の組のなかで，この条件に適する２数は，－１と４である。

積が－４	和が３
１と－４	×
－１と４	○
－２と２	×

$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

問２（４問）問３（４問）　略

● $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$，$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$の公式

例３　x^2+6x+9　を因数分解しなさい。

考え方　$9=3^2$，$6=2\times3$　であるから平方の公式を使って因数分解することができる。

$$x^2+2\boxed{a}x+\boxed{a}^2=(x+\boxed{a})^2$$
$$x^2+2\times\boxed{3}\times x+\boxed{3}^2=(x+\boxed{3})^2$$

問４，（６問）例４，問５（４問）　上記説明と大差なし　略

● $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$　の公式

例５　（１）$x^2-16=x^2-4^2$
$=(x+4)(x-4)$

（２）$9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2$
$=(3x+2y)(3x-2y)$

$$(\boxed{x}+\boxed{a})\ (\boxed{x}-\boxed{a})$$
$$(\boxed{3x}+\boxed{2y})\ (\boxed{3x}-\boxed{2y})$$

問６（６問）略

● いろいろな因数分解

例６

$3x^2-6x-24$　共通因数３を，かっこの外にくくりだす。

$=3(x^2-2x-8)$　かっこの中の式を因数分解する。

$=3(x+2)(x-4)$

問７（４問）練習１（６問）練習２（３問）　略

以上が中学校教科書の内容である。

３　高校一年生の教科書内容の一部

教科書は第Ⅰ章から第Ⅳ章までで構成され，第Ⅰ章の（３）節に因数分解に関する内容がある。

第Ⅰ章　数と式　（１）整式　（２）整式の加法・減法・乗法　（３）因数分解

（３）因数分解

$$x^2+3x+2$$
因数分解 ↓ ↑ 展開
$$(x+1)(x+2)$$

$(x+1)(x+2)$を展開すると　x^2+3x+2　になる。
逆に，x^2+3x+2を$(x+1)(x+2)$のような積の形にすることを因数分解といい，$x+1$や$x+2$をx^2+3x+2の因数という。
すなわち，因数分解とは，与えられた整式をいくつかの整式の積に表すこ

とである。

■ 共通な因数のくくり出し

整式の各項に③共通な因数があるとき，それをかっこの外にくくり出して，整式を因数分解することができる。

例15　(1) $ab+ac-ad=a(b+c-d)$

(2) $4x^2y-6xy^2=2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y$

$=2xy(2x-3y)$

問19　次の式を因数分解せよ。

(1) $xy+xz$　(2) $x^2-xy-3x$　(3) $abc-acd$　(4) $12x^2y+18xy^2$

■ ２次式の因数分解

④乗法公式を逆に用いて，因数分解することを考えよう。

{1} $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$　{2} $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
{3} $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

例16　(1) $x^2+6x+9=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2$

$=(x+3)^2$

(2) $4x^2-4xy+y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot y+y^2$

$=(2x-y)^2$

(3) $x^2-16y^2=x^2-(4y)^2$

$=(x+4y)(x-4y)$

問20　次の式を因数分解せよ。

(1) x^2+4x+4　(2) $16x^2-24x+9$　(3) $x^2+8xy+16y^2$

(4) $4x^2-20xy+25y^2$　(5) $9x^2-25$　(6) $8x^2-18y^2$

{4} $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例17　x^2+2x-8 を因数分解するには，積が－８，和が２となる２数を見つければよい。このような２数は－２と４

積が－８となる２数の組	1 －8	－1 8	2 －4	－2 4
和	－7	7	－2	2

であるから

$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$$

問21　（6問）略

x^2の係数が1でないときには，次の公式が有効である。

$$\boxed{\{5\}\ acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$$

例18　$2x^2+7x+6$を因数分解せよ。

＜考え方＞　x^2の係数が1でないxの2次式であるから，公式{5}を利用して

$ac=2$・・・・・・①

$ad+bc=7$・・・②

$bd=6$・・・・・・③

を満たすa，b，c，dが見つかれば因数分解できる。

先ず，①と③に注目し，その中で②を満たすものをさがす。

ac	bd		
a	b	→	bc
c	d	→	ad
			ad+bc

①積が2となる a，cの組			
	a	1	2
	c	2	1

2	6		
1	6	→	12
2	1	→	1
			13

失敗

2	6		
1	2	→	4
2	3	→	3
			7

成功

$a=1$，$b=2$，$c=2$，$d=3$とすれば，条件①，②，③を満たす。

【解】　$2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$

問22　（6問）略

■　3次式の因数分解

⑤3乗の和，3乗の差は，次の公式を用いれば因数分解できる。

$$\boxed{\{6\}\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\quad \{7\}\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

【証明】公式{6}の右辺を展開すると

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

問23　公式｛7｝が成り立つことを示せ。

例19　（1）$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$
$$=(x+1)(x^2-x+1)$$
（2）$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

問24　（4問）略

■　因数分解の工夫

例20　（1）$a(a+1)-b(a+1)$　　←　$a+1$を1つの文字と考える
$$=(a+1)(a-b)$$
（2）$y(x-1)+2(1-x)$　　←　$1-x=-(x-1)$
$$=y(x-1)-2(x-1)=(x-1)(y-2)$$

問25　（4問）略

例21　次の式を因数分解せよ。

（1）$(x-y)^2-6(x-y)+8$　　（2）$x^2-(y-z)^2$

【解】（1）$x-y=A$とおくと
$$(x-y)^2-6(x-y)+8=A^2-6A+8$$
$$=(A-2)(A-4)$$
$$=(x-y-2)(x-y-4)$$
（2）$y-z=B$とおくと
$$x^2-(y-z)^2=x^2-B^2$$
$$=(x+B)(x-B)$$
$$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$$
$$=(x+y-z)(x-y+z)$$

問26　（4問）略

⑥2つ以上の文字を含む整式においては，次数の最も低い文字について整理するとうまく因数分解ができることがある。

例22　$2ab+2b^2+3a+3b$を因数分解せよ。

考え方　この式はａについて１次式，ｂについて２次式であるから
次数の低いａについて整理する。

【解】ａについて整理すると

$$\begin{aligned} 2ab+2b^2+3a+3b &= (2b+3)a+2b^2+3b \\ &= (2b+3)a+(2b+3)b \\ &= (2b+3)(a+b) \end{aligned}$$

問27　（２問）　略　問題　（10問）

以上が高校一年で履修する因数分解に関する内容である。

４　中学・高等学校の教科書に見られた因数分解解法の共通点と問題点

＜共通点のその１＞　公式を提示し，例題で解法の技法を説明している。

＜共通点のその２＞　「共通因数でくくり出す」ことによって因数分解ができると説明している。

【根拠】下線を施した中学校教科書①，高等学校教科書③からである。

下線①・・共通な因数があるときは，分配法則を使い，共通な因数をかっこの外にくくり出すことによって，その多項式を因数分解することができます。

下線③・・共通な因数があるとき，それをかっこの外にくくり出して，整式を因数分解することができる。

＜共通点のその３＞　乗法公式を逆に使うことで因数分解ができると説明している。

【根拠】下線を施した中学校教科書②，高等学校教科書④からである。

下線②・・乗法公式を逆に使うと，多項式を因数分解できます。

下線④・・乗法公式を逆に用いて，因数分解することを考えよう。

＜問題点のその１＞　「公式の左辺から右辺を導き出す方法はないのか」という生徒の質問に対する回答は「乗法公式の逆です」だけでいいのか。

＜問題点のその２＞　下線を施した高等学校教科書⑤の説明。

その下線⑤・・３乗の和，３乗の差は，次の公式を用いれば因数分解できる。

【問題点の根拠】等式の証明としては正しい。しかし「因数分解しなさい」という問題に対し，正しく因数分解された式を展開したら当然因数分解しなければならない式になる。だから，等式の証明としては正しいが，因数分解という節でのこの証明は不適切である。

だから，左辺の式を変形して，共通因数を作り出す工夫をした。

＜問題点のその３＞　下線を施した高等学校教科書⑥の説明。

その下線⑥・・２つ以上の文字を含む整式においては，次数の最も低い文字について整理するとうまく因数分解ができることがある。

【問題点の根拠】２つ以上の文字を含む整式で，次数が「等しい場合」がある。その時は「どうするのか」が説明されていない。
次数が等しい場合は，「どの文字について整理しても因数分解できる」と言う説明が必要である。

以上のことから，因数分解の基本公式の導き方を左辺の式から「共通因数を作り出す」ことによって右辺の式を導き出してみる。

５　因数分解の基本公式を共通因数を作り出すことによって導き出す方法

前述したように乗法公式の逆が因数分解の公式として提示してある。そして，この式が成り立つことを高校教科書の下線⑤にあるように「等式の証明」として「等式が成り立つ」という説明で終えている。中学・高校の教科書に記述されている，因数分解解決の基本「共通因数でくくり出す」という言葉を使用して「共通因数を作り出して」因数分解の公式を導き出す説明は，教科書のどこにも記述されていない。そこで，「共通因数を作り出して」因数分解の基本公式を導き出してみる。

まず，一般的な因数分解の基本公式を列挙しておく。

（１）因数分解の基本公式

1　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

2　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

3　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

5　$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

6　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

7　$acx^2-(ad+bc)x+bd=(ax-b)(cx-d)$

8　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

9　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

10　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

11　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

12　$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

13　$a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=(a-b-c)^2$

14　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

これらの公式は中学校で１～５を学習。高校では１～９の公式を文系，理数系の人たちは１～14

までを学習していると思っている。

（２）因数分解基本公式の導き方

「共通因数を作り出す」方法で公式を導き，その後，色々な問題で，公式を導き出す方法での解答の難しさに気付かせる。このことで，「公式を暗記」していたら，解法が早いと気付くだろう。

公式１　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

＜共通因数のつくり出し方＞

左辺$=a^2+2ab+b^2$　→　$2ab=ab+ab$

$=a^2+ab+ab+b$

$=a(a+b)+b(a+b)$

$=(a+b)(a+b)$

$=(a+b)^2$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

x^2+4x+4

$=x^2+2x+2x+4$

$=x(x+2)+2(x+2)$

$=(x+2)(x+2)$

$=(x+2)^2$

公式２　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

左辺$=a^2-2ab+b^2$　→　$-2ab=-ab-ab$

$=a^2-ab-ab+b^2$

$=a(a-b)-b(a-b)$

$=(a-b)(a-b)$

$=(a-b)^2$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

x^2-4x+4

$=x^2-2x-2x+4$

$=x(x-2)-2(x-2)$

$=(x-2)(x-2)$

$=(x-2)^2$

公式３　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

左辺$=a^2-b^2$

$=a^2+ab-ab-b^2$ → $+ab-ab=0$

$=a(a+b)-b(a+b)$

$=(a+b)(a-b)$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$25x^2-16y^2$

$=(5x)^2-(4y)^2$

$=(5x)^2+20xy-20xy-(4y)^2$

$=5x(5x+4y)-4y(5x+4y)$

$=(5x+4y)(5x-4y)$

公式４　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

左辺を見ると，ｘ，ａ，ｂの三文字からなっているので

高校教科書の下線⑥を使う。

左辺$=x^2+(a+b)x+ab$　→ $(a+b)x$を展開する。

$=x^2+ax+bx+ab$

展開した式の各文字の次数を見ると，

ｘは２次，ａ，ｂは１次だから

次数の低い文字ｂについて整理する（ａでも良い）

＜問題が与えられた時の解法＞

x^2+5x+6

$=x^2+2x+3x+6$

$=x^2+2x+3x+6$

$=x^2+2x+3x+6$

$=x(x+2)+3(x+2)$

$=(x+a)b+x(x+a)$

$=(x+a)(b+x)$　→ $(b+x)$ に交換法則を利用

$=(x+a)(x+b)=$右辺

$=(x+2)(x+3)$

公式５　$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

公式４と同じように，左辺を見ると，ｘ，ａ，ｂの三文字からなっているので高校教科書の下線⑥を使う。

左辺$=x^2-(a+b)x+ab$　→ $(a-b)x$ を展開する。

$=x^2-ax-bx+ab$

展開した式の各文字の次数を見ると，

ｘは２次，ａ，ｂは１次だから

次数の低い文字ｂについて整理する（ａでも良い）

$=(-x+a)b+x(x-a)$

$=\{-(x-a)\}b+x(x-a)$　→　$\{-(x-a)\}$ に交換法則を利用

$=\{(x-a)(-b)\}+x(x-a)$

$=(x-a)(-b+x)$　→　$(-b+x)$ に交換法則を利用

$=(x-a)(x-b)=$右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$x^2-8x+15$

$=x^2-3x-5x+15$

$=x(x-3)-5(x-3)$

$=x(x-3)-5(x-3)$

$=x(x-3)-5(x-3)$

$=(x-3)(x-5)$

公式６　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

公式４，５と同じように，左辺を見ると，ｘ，ａ，ｂ，ｃ，ｄの五文字からなっているので高校教科書の下線⑥を使う。

左辺$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=acx^2+adx+bcx+bd$

展開した式の各文字の次数を見ると，

ｘは２次，ａ，ｂ，ｃ，ｄは１次だから

次数の低い文字ｄについて整理する（ａ，ｂ，ｃでも良い）

$=(ax+b)d+cx(ax+b)$

$=(ax+b)(d+cx)$　→ $(d+cx)$ に交換法則を利用

$=(ax+b)(cx+d)=$右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$6x^2+17x+12$

$=6x^2+8x+9x+12$

$=2x(3x+4)+3(3x+4)$

$=(3x+4)(2x+3)$

公式７　$acx^2-(ad+bc)x+bd=(ax-b)(cx-d)$

公式４，５，６と同じように，左辺を見ると，ｘ，ａ，ｂ，ｃ，ｄの五文字からなっているので高校教科書の下線⑥を使う。

左辺$=acx^2-(ad+bc)x+bd$

$=acx^2-adx-bcx+bd$

展開した式の各文字の次数を見ると，

＜問題が与えられた時の解法＞

$15x^2-31x+14$

$=15x^2-10x-21x+14$

xは2次，a，b，c，dは1次だから

次数の低い文字dについて整理する（a，b，cでも良い）

$= (-ax+b)d + cx(ax-b)$

$= \{-(ax-b)d\} + cx(ax-b)$ → $\{-(x-a)d\}$ に交換法則を利用

$= \{(ax-b)(-d)\} + cx(ax-b)$

$= (ax-b)(-d+cx)$　→　$(-d+cx)$ に交換法則を利用

$= (ax-b)(cx-d)$ =右辺

$= 5x(3x-2) - 7(3x-2)$

$= (3x-2)(5x-7)$

公式8　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

公式3で考えたように

左辺 $= a^3+b^3$

$= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2+b^3$

$= a^2(a+b) - ab(a+b) + b^2(a+b)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$27x^3+8y^3$

$=27x^3+18x^2y+12xy^2-18x^2y-12xy^2+8y^3$

$=9x^2(3x+2y)-6xy(3x+2y)+4y^2(3x+2y)$

$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

公式9　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

公式3で考えたように

左辺 $= a^3-b^3$

$= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$= a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b)$

$= (a-b)(a^2-ab+b^2)$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$27x^3-8y^3$

$=27x^3+18x^2y+12xy^2-18x^2y-12xy^2-8y^3$

$=9x^2(3x-2y)+6xy(3x-2y)+4y^2(3x-2y)$

$=(3x-2y)(9x^2+6x+4y^2)$

公式10　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$3a^2b+3ab^2$　に着目し

左辺 $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$

$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$= (a+b)^2\ (a+b)$

$= (a+b)^3$ =右辺

＜問題が与えられた時の解法＞

$8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

$=8x^3+24x^2y+12x^2y+36xy^2+18xy^2+27y^3$

$=2x(4x^2+12xy+9y^2)+3y(4x^2+12xy+9y^2)$

$=(4x^2+12xy+9y^2)(2x+3y)$

$=(2x+3y)^2\ (2x+3y)$

$=(2x+3y)^3$

公式11　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$-3a^2b+3ab^2$に着目し　$-3a^2b+3ab^2=-2a^2b-a^2b+2ab^2+ab^2$と分解。

左辺 $= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$= a^3-2a^2b-a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$

$= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$

$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$
$=(a-b)^2\ (a-b)$
$=(a-b)^3$ ＝右辺

公式12　$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
$2ab+2bc+2ca$　に着目し，この項を次のように分解。
左辺$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$=a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca$
$=a^2+ab+ca+b^2+bc+ba+c^2+ca+bc$
$=a(a+b+c)+b(b+c+a)+c(c+a+b)$　交換法則で$(a+b+c)$を作る。
$=(a+b+c)(a+b+c)$
$=(a+b+c)^2$ ＝右辺

公式13　$a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=(a-b-c)^2$
$-2ab+2bc-2ca$　に着目し，この項を次のように分解。
左辺$=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$=a^2+b^2+c^2-ab-ab+bc+bc-ca-ca$
$=a^2-ab-ca+b^2+bc-ab+c^2-ca+bc$
$=a(a-b-c)-b(-b-c+a)-c(-c+a-b)$
$=a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a-b-c)$
$=(a-b-c)^2$ ＝右辺

公式14　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
公式１～３で考えたように
左辺$=a^3+b^3+c^3-3abc$
$=a^3+a^2b+a^2c+b^3+b^2a+b^2c+c^3+c^2a+c^2b-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b-abc-abc-abc$
$=a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)-ab(a+b+c)-bc(a+b+c)-ca(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ＝右辺

以上，公式１～14までを「共通因数でくくり出す」という因数分解の鉄則で作り出したがいかがでしょうか。

５　おわりに

因数分解の公式は，乗法公式の逆である。まさしくそのとおりである。しかし，因数分解を学習する冒頭に公式１について$a^2+2ab+b^2$がどうして$(a+b)^2$となるのかと質問されたとき「乗法公式から$(a+b)^2$となるのだ」で納得するのだろうか，という疑問から考えた導き方である。

この考え方の手がかりは，順列の冒頭に学習する「積の法則」であった。

即ち$(a+b)(c+d)$を展開したとき何項の項ができるかが手がかりとなった。

また，導き方を示した右側に＜問題が与えられた時の解法＞として解法例を一部提示したが，因数分解をしなければ解答できないような問題で，その度＜問題が与えられた時の解法＞みたいなことを考えていたら限られた時間内での問題解答はおぼつかない。

だから，乗法公式の逆を因数分解の公式として暗記しておいたほうが問題解法の速度が速くなるのだと説明したら，学習者も競って暗記するのではないか。

「何故暗記せよ」と言われているか。その理由を説明することが，学習意欲を奮い立たせる一つでもある。

この導き方について日本数学教育学界で今年度発表しようと思っていたが，原稿締め切りが本年３月末日だったために未発表となった。

だから，皆さんのご意見をいただきたく発表した。ご意見をいただけたら誠に嬉しい。

(2008年12月３日　受理)